**INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS**
Campus Avançado Conselheiro Lafaiete
Apostila elaborada pelo docente Alexandre Correia Fernandes

# ESTUDO DAS MATRIZES

## Definição de matriz

Consideremos a tabela abaixo, construída a partir da coleta de informações sobre o preço do quilo do arroz tipo 1, do feijão preto e do macarrão, em quatro supermercados de uma capital brasileira:

| | Supermercado A | Supermercado B | Supermercado C | Supermercado D |
|---|---|---|---|---|
| Arroz | 2,40 | 2,57 | 2,38 | 2,49 |
| Feijão | 3,02 | 3,17 | 2,91 | 3,20 |
| macarrão | 1,99 | 2,05 | 1,87 | 2,12 |

Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Portanto, se abstrairmos os significados das linhas e colunas da tabela acima, obteremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2{,}40 & 2{,}57 & 2{,}38 & 2{,}49 \\ 3{,}02 & 3{,}17 & 2{,}91 & 3{,}20 \\ 1{,}99 & 2{,}05 & 1{,}87 & 2{,}12 \end{bmatrix}$$

Uma matriz genérica A, com m linhas e n colunas pode ser representada por

$$A_{m\times n}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

em que os índices ñ*i*ò e ñ*j*ò indicam, respectivamente, a linha e a coluna à qual pertence o elemento $a_{ij}$.

### Escrevendo uma matriz a partir de sua lei de formação

- Escreva a matriz A = $\left[a_{ij}\right]_{3x2}$, tal que $a_{ij}$ = *2i* **ï** *j + 1*.

De acordo com os dados fornecidos, a matriz deve ter 3 linhas e duas colunas, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$.

Substituindo-se i e j pelos valores correspondentes, para cada elemento, obtém-se:

$a_{11}$ = 2.1 ï 1 + 1 = 2
$a_{12}$ = 2.1 ï 2 + 1 = 1
$a_{21}$ = 2.2 ï 1 + 1 = 4
$a_{22}$ = 2.2 ï 2 + 1 = 3
$a_{31}$ = 2.3 ï 1 + 1 = 6
$a_{32}$ = 2.3 ï 2 + 1 = 5

Logo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$.

## Exercícios propostos

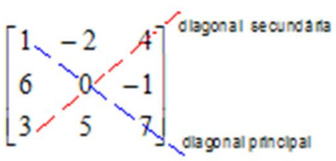
Q1. Determine a matriz A = $\left[a_{ij}\right]_{2x2}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Q2. Dada a matriz A = $\left[a_{ij}\right]_{5x7}$ tal que A = $a_{ij} = \begin{cases} -i^2, \ se \ i + j \ é \ par \\ 2ij, \ se \, i + j \ é \ ímpar \end{cases}$, determine $a_{32} + a_{42}$.

## Tipos especiais de matrizes

**a) Matriz quadrada ï** é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Numa matriz quadrada de ordem n, os elementos $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, ..., $a_{nn}$, isto é, os elementos $a_{ij}$ com i = j, constituem a *diagonal principal* da matriz e os elementos $a_{ij}$ para os quais verifica-se que i + j = n+1 constituem a *diagonal secundária* da matriz.




**b) Matriz nula** ï é aquela em que todos os elementos são nulos, isto é, $a_{ij}$ = 0, para todo i e j. É comum indicar-se a matriz nula por $O = \left[0_{ij}\right]_{m \times n}$.

**c) Matriz triangular** ï é uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior      Matriz triangular superior

**d) Matriz diagonal** ï é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

**e) Matriz identidade** ï é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Indica-se a matriz identidade de ordem n por $I_n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal      Matriz identidade

**f) Matriz linha** ï é aquela que possui apenas 1 linha (m = 1).

**g) Matriz coluna** ï é aquela que possui uma única coluna (n = 1)

**h) Matriz simétrica** ï é uma matriz quadrada na qual se verifica que $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & i & h \\ d & g & h & o \end{bmatrix}$$

matriz linha      matriz coluna      matriz simétrica

## Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são ditas *iguais* se, e somente se, têm o mesmo tamanho e seus elementos correspondentes são iguais.

**Determinando incógnitas para que duas matrizes sejam iguais**

- Determine a, b, c e d, sabendo que $\begin{bmatrix} a+b & c-d \\ 2a+b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$.

Da definição de igualdade de matrizes segue que

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c-d=0 \\ 3c+d=8 \end{cases}$$

Solucionando-se os sistemas acima, encontra-se a = ï 4, b = 5, c = 2 e d = 2.

## Operações com matrizes

**a) Adição e subtração**: A adição e subtração de duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$, de mesma ordem, é uma matriz $C_{m \times n}$ cujos elementos são obtidos pela soma ou diferença dos elementos correspondentes de A e B, respectivamente.

**Propriedades da adição**

Dadas as matrizes A, B e C, de mesma ordem, são válidas as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

| | |
|---|---|
| i) Comutativa | A + B = B + A |
| ii) Associativa | (A+B) + C = A + (B + C) |
| iii) Elemento neutro | A + 0 = 0 + A = A |
| iv) Cancelamento | A = B $\Leftrightarrow$ A + C = B + C |

**b) Multiplicação de um número real por uma matriz:** Seja $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ e $\alpha$ um número real. A matriz $\alpha$A, m x n, é a matriz cujos elementos são $b_{ij} = \alpha . a_{ij}$.

Se $\alpha$ = ï 1, obtém-se a matriz *oposta* de A, isto é, a matriz que somada com A dá como resultado a matriz nula.

**Propriedades**

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, e os números reais $\alpha$, $\alpha_1$ e $\alpha_2$, verifica-se que:

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
ii) $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$
iii) $0.A = 0$
iv) $\alpha_1(\alpha_2 A) = (\alpha_1 \alpha_2)A$

**c) Transposição:** Dada uma matriz $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$, denomina-se transposta de A a matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A.

**Propriedades**

i) $(A^t)^t = A$
ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$
iii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

**Operando matrizes**

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, calcule A + B, A ï B e $5A + \frac{1}{2}B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 4+(-1) \\ 3+7 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-5 & 4-(-1) \\ 3-7 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5A + \frac{1}{2}B = 5\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + \frac{5}{2} & 20 - \frac{1}{2} \\ 15 + \frac{7}{2} & 25 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & \frac{39}{2} \\ \frac{37}{2} & 27 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, encontre a matriz X, tal que 2X ï A + 3B = 0

  Isolando X, obtém-se $X = \frac{1}{2}A - \frac{3}{2}B$.

  Logo, $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{2} & 0 - \frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2} - 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{9}{2} & 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

- Calcule as matrizes X e Y que verificam as condições $\begin{cases} 2X + Y = 3A + B \\ X - Y = 2A - 3B \end{cases}$, considerando que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

  Resolvendo-se o sistema, obtém-se $X = \frac{5}{3}A - \frac{2}{3}B$ e $Y = -\frac{1}{3}A + \frac{7}{3}B$.

  Portanto, $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \frac{7}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $(A + B)^t$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e, portanto, } (A+B)^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

**d) Multiplicação de matrizes:** Sejam $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{n \times p}$ duas matrizes. O produto da matriz A pela matriz B, indicado por AB, é a matriz $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{m \times p}$ tal que o elemento $c_{ij}$ é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha *i*, da matriz A, pelos elementos da coluna *j*, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos.

Cabe ressaltar que o produto AB só é possível se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

**Propriedades**

i) Geralmente, AB ≠ BA.
ii) AI = IA = A
iii) A(B + C) = AB + AC
iv) (A + B)C = AC + BC
v) (AB)C = A(BC)
vi) $(AB)^t = B^tA^t$
vii) 0.A = A.0 = 0

**Multiplicando matrizes**

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz $AB^t$.

$$AB^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2(-1) & 1.0 + 2.2 & 1.2 + 2.3 \\ 3.1 + 4(-1) & 3.0 + 4.2 & 3.2 + 4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Determinar a matriz X, tal que A.X = B.

$A_{2x2}.X_{m\,x\,n} = B_{2x1} \Rightarrow m = 2 \; e \; n = 1$. Logo, a matriz X é do tipo 2 x 1.

Representando X por $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, segue que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

Desenvolvendo-se o produto matricial, verifica-se que $\begin{bmatrix} a+2b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, ou seja,

$\begin{cases} a+2b=3 \\ b=4 \end{cases}$.

Logo, $X = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

## Exercícios propostos

Q3. Determinar os números reais a e b de modo que as matrizes A e B sejam iguais, dadas $A = \begin{bmatrix} 5a-2b & 6 \\ 1 & a+b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Q4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que X + A = B ï C.

Q5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X na equação matricial AX = B.

## Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se X é uma matriz tal que AX = $I_n$ e XA = $I_n$, então X é chamada de *matriz inversa* de A e é indicada por $A^{-1}$.

Vale ressaltar que nem toda matriz quadrada admite uma matriz inversa.

### Encontrando a inversa de uma matriz

- Determine, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tem-se:

$$A.A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da condição de igualdade de duas matrizes, seguem os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5} \;\; e \;\; c = \frac{2}{5} \qquad\qquad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{2}{5} \;\; e \;\; d = \frac{1}{5}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

## Questões propostas

Q6. (UNI-RIO) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, determine o valor de $A^{ï1} + A^t$ ï $I_2$.

Q7. Verificar se ⍰ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ é inversível e obter, caso exista, sua inversa.

## Questões complementares

Q8. (UERJ) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ da matriz corresponde à temperatura observada no instante ***i*** do dia ***j***.

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;
b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

Q9. (UFG) Seja $M = \lfloor a_{ij} \rfloor_{nxn}$ uma matriz quadrada de ordem n, onde $a_{ij} = i + j$. Nessas condições, a soma dos elementos da diagonal principal da dessa matriz é:

a) $n^2$ b) $2n + 2n^2$ c) $2n + n^2$ d) $n^2 + n$ e) $n + 2n^2$

Q10. (UCS-BA) A equação matricial $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é verdadeira se x, y e z são tais que x + y + z é igual a:

a) ï 3 b) ï 1 c) 0 d) 1 e) 3

Q11. (UFSC) Sejam $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{4x3}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{3x4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se A.B = C, então qual é o elemento $c_{32}$ da matriz C?

Q12. (UFC-CE) O valor de **a** para que a igualdade matricial $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja verdadeira é:

a) 1 b) 2 c) 0 d) ï 2 e) ï 1

Q13. (UFRS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante:

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} arroz \\ carne \\ salada \end{array}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usadas na composição dos pratos tipo $P_1$, $P_2$ e $P_3$ desse restaurante:

$$\begin{array}{c} \quad arroz \;\; carne \;\; salada \\ P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ prato\ P_1 \\ prato\ P_2 \\ prato\ P_3 \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ é:

a) $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Q14. (UFAM) Sejam A, B e C matrizes quadradas quaisquer de ordem n. Então é correto afirmar que:

a) Se AB = AC, então B = C.
b) AB = BA
c) Se $A^2 = 0_n$ (matriz nula), então $A = 0_n$
d) (AB)C = A(BC)
e) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB+B^2$

Q15. (UFRRJ)Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, denotamos por $\mathbf{A^{-1}}$ a matriz inversa de **A**. Então $A + A^{-1}$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -[illegible] & [illegible] \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ [illegible] & [illegible] \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Q16. (UFRRJ) Uma fábrica de guarda-roupas utiliza três tipos de fechaduras (dourada, prateada e bronzeada) para guarda-roupas em mogno e cerejeira, nos modelo básico, luxo e requinte. A tabela 1 mostra a produção de móveis durante o mês de outubro de 2005, e a tabela 2, a quantidade de fechaduras utilizadas em cada tipo de armário no mesmo mês.

Tabela1: Produção de armários em outubro de 2005.

| Modelo / Madeira | Básico | Luxo | Requinte |
|---|---|---|---|
| Mogno | 3 | 5 | 4 |
| Cerejeira | 4 | 3 | 5 |

Tabela 2: Fechaduras usadas em outubro de 2005

| Madeira / Tipo | Mogno | Cerejeira |
|---|---|---|
| Dourada | 10 | 12 |
| Prateada | 8 | 8 |
| Bronzeada | 4 | 6 |

A quantidade de fechaduras usadas nos armários do modelo requinte nesse mês foi de:

a) 170
b) 192
c) 120
d) 218
e) 188

Q17. (Udesc) Considere as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & ?\\ ? & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, a soma dos valores numéricos de x, para os quais a igualdade $A^2$ - 2 A ï 3I=0 é verificada é:

a) x = 0
b) x = 2
c) x = 1
d) x = -2
e) x = -1

Q18. (UEL-PR) uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1- Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave **C**.
2- O destinatário recebe do remetente uma matriz **P**, tal que MC=P, onde **M** é matriz mensagem a ser decodificada.
3- Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1=a, 2=b, 3=c,...,23=z
4- Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras **k**,**w** e **y**.
5- O número zero corresponde ao ponto de exclamação.

6- A mensagem é lida, encontrando a matriz **M**, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}$ $m_{12}$ $m_{13}$ $m_{21}$ $m_{22}$ $m_{23}$ $m_{31}$ $m_{32}$ $m_{33}$.

Considere as matrizes $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{pmatrix}$. Com base nos conhecimentos e informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz **M**.

a) Boasorte! b) Boaprova! c) Boatarde! d)Ajudeme! e)Socorro!

# DETERMINANTE

O determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$,de ordem n, é um número real (único) a ela associado, que pode ser indicado por det A ou | A| ou $\det = [a_{ij}]$.

## Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1

Seja a matriz $A = [a_{11}]_{1x1}$. Seu determinante é o valor de seu único elemento, ou seja,

$$\text{det A} = |a_{11}| = a_{11}$$

## Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2

O determinante da matriz quadrada de ordem 2 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é o número real obtido fazendo o produto dos elementos de sua diagonal principal menos o produto dos elementos de sua diagonal secundária, isto é,

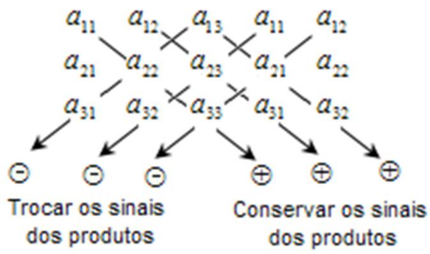
$$\text{det A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

## Determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 ï Regra de Sarrus

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser obtido a partir da regra prática de Sarrus, apresentada na seqüência.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Inicialmente deve-se repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz, conforme o esquema a seguir:




Em seguida, deve-se conservar os sinais dos produtos obtidos na direção da diagonal principal e inverter os sinais dos produtos obtidos na direção da diagonal secundária.

O determinante da matriz quadrada de ordem 3 é a soma dos valores assim obtidos.

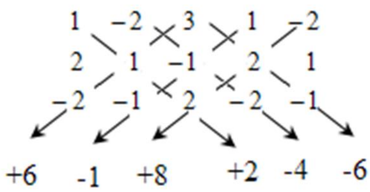
**Calculando determinantes**

- Calcule os determinantes das matrizes abaixo:

a) $A = [-7]$ b) $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 5 & \sqrt{8} \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Das regras apresentadas acima, segue que

a) det A = -7;
b) det B = $\sqrt{2}.\sqrt{8} - (-3).5 = 4 + 15 = 19$
c)




det C = 6 ï 1 + 8 + 2 ï 4 ï 6 = 5

- Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2^x & 2^2 \\ 2^x & 2^x \end{vmatrix} = 2^5$.

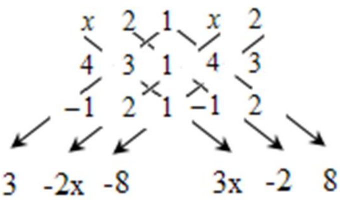
Desenvolvendo-se o determinante de 2ª ordem, obtém-se a equação exponencial $\left(2^x\right)^2 - 4.2^x = 2^5$, que pode ser resolvida fazendo-se $2^x$ = y, observando que y >0.

$\left(2^x\right)^2 - 4.2^x = 2^5 \Rightarrow y^2$ ï 4y ï 32 = 0 $\Rightarrow$ y = ï 4 (impossível) ou y = 8

y = 8 $\Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow$ x = 3.

- Resolva a inequação $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$.

Desenvolvendo-se, pela regra de Sarrus, o determinante de 3ª ordem contido no primeiro membro da inequação acima, encontra-se




donde segue a inequação do 1º grau:

$$3-2x-8+3x-2+8 \le 3x-2$$
$$-2x \le -3 \quad (-1)$$
$$2x \ge 3$$
$$x \ge \frac{3}{2}$$
$$S=\left\{x \in IR \mid x \ge \frac{3}{2}\right\}$$

## Questões propostas

Q1. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Q2. Determine x tal que:

a) $\begin{vmatrix} 2\,\text{[illegible]} & \text{[illegible]}3\,\text{[illegible]}\ \text{[illegible]}\ 2\,\text{[illegible]} \\ 1 & \text{[illegible]} \end{vmatrix} \text{[illegible]}\ 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \text{[illegible]} & 1 & 3 \\ 1 & \text{[illegible]} & 3 \end{vmatrix} \text{[illegible]}\ 0$

Q3. (UFBA) O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} \text{[illegible]} & 2 & 1 \\ 0 & 2\,\text{[illegible]} & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é igual à maior das raízes da equação $|10\ \text{[illegible]}\ \text{[illegible]}|\ \text{[illegible]}\ 2$. Determine o menor valor de y.

## Determinante de matrizes quadradas de ordem n ï Teorema de Laplace

As regras apresentadas anteriormente permitiram o cálculo de determinantes de 1ª, 2ª e 3ª ordens. Todavia, necessária se faz, também, a apresentação de um método adequado para o cálculo de determinantes das demais ordens.

Para este propósito, há o Teorema de Laplace, que possibilita o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n (n ≥ 2).

O teorema de Laplace está diretamente relacionado ao conceito de cofator de um elemento da matriz A, apresentado a seguir:

> Dada uma matriz quadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, de ordem n (n ≥ 2), denomina-se *cofator do elemento $a_{ij}$* o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante $D_{ij}$ da matriz obtida quando se retira de A a linha i e a coluna j.

O cofator do elemento $a_{ij}$ será indicado por $C_{ij}$ ou por $\Delta_{ij}$.

**Calculando cofatores**

- Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determine $C_{21}$ e $C_{22}$.

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-6-24-60-6) = 96$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(3+12-24+3) = -6$$

**O teorema de Laplace**

> O determinante associado a uma matriz quadrada $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, de ordem n ≥ 2, é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Vale ressaltar que, independente da linha ou coluna escolhida, o resultado é sempre o mesmo. Entretanto, é conveniente optar-se pela fila que possui mais zeros a fim de reduzir a quantidade de cálculos necessários.

**Calculando um determinante pelo Teorema de Laplace.**

- Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Será escolhida a 2ª linha (pois ela possui dois elementos iguais a zero).

det A= $4.C_{21} + 2.C_{22} + 0.C_{23} + 0.C_{24}$.

Como $C_{21}$ e $C_{22}$ já foram obtidos no exemplo anterior e não há a necessidade de calcular-se $C_{23}$ e $C_{24}$, uma vez que eles estão multiplicados por zero,segue que: det A = 4.96 + 2.(-6) = 372.

## Questão proposta

Q4. Calcule o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & ´-1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

## Propriedades dos determinantes

i) Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A são nulos, então det A = 0.
ii) O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta, ou seja, det A = det $A^t$.
iii) Ao multiplicar-se uma linha da matriz por uma constante $\alpha$, o determinante também fica multiplicado pela mesma constante $\alpha$.
iv) O determinante troca de sinal ao trocar-se a posição de duas linhas ou colunas.
v) O determinante de uma matriz que possui duas linhas (ou colunas) iguais ou proporcionais é zero.
vi) det (A.B) = det A . det B.
vii) Se todos os elementos de uma matriz quadrada A, situados de um mesmo lado da diagonal principal, forem nulos, então o determinante de A será igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.

**Aplicando as propriedades no cálculo de determinantes**

- Calcule o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

  det A = (-1).2.(-3).1 = 6, uma vez que, na matriz A, todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

- Sendo $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1/3 & \frac{3}{5} & 1/2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0,7 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, calcule det (AB).

  Na matriz A, a 3ª linha é proporcional à 2ª; portanto, det A = 0.
  Como det (AB) = det A. det B, pode-se afirmar que det (AB) = 0, independentemente do valor de det B.

## Determinante da matriz inversa

É possível provar-se que o determinante da matriz inversa de A é igual ao inverso multiplicativo do determinante de A, ou seja,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Logo, se det A = 0, a matriz A não admite inversa.

**Calculando o determinante da inversa de uma matriz**

- Dada a matriz $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, calcule det $M^t$ + det $M^{-1}$.

  A partir da regra de Sarrus, obtém-se det M = 16.

  det M = det $M^t \Rightarrow$ det $M^t$ = 16
  $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} \Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{16}$
  Logo, $\det M^{t} + \det M^{-1} = 16 + \frac{1}{16} = \frac{257}{16}$

▪ Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, encontre x para que a matriz A admita inversa.

Utilizando-se a regra de Sarrus, verifica-se que det A = 3x − 6.
Para A ser invertível, é necessário que det A ≠ 0.
Portanto, x ≠ 2.

## Questão proposta

Q5. (UFJF) Considere a matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Calcular o determinante da matriz inversa de A.

## Questões complementares

Q6. (UFC-CE) Determine a soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$.

Q7. (Cefet-PR) Uma matriz **A** quadrada, de ordem 3, possui determinante igual a 2. O valor de det $(2 \cdot A^{-1})$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Q8. (Cefet-PR) Se $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$, então $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ vale:

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

Q9. (PUC-RS) Se a matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tem inversa, então det $A^{-1}$ é:

a) bc − ad

b) [illegible] - [illegible]

c) Det A

d) [illegible]

e) [illegible]

Q10. (UEG-GO) Sendo **x** e **y,** respectivamente, os determinantes das matrizes [illegible] e $\begin{bmatrix} -4[illegible] & -4[illegible] \\ 5[illegible] & 5[illegible] \end{bmatrix}$ , é verdade que [illegible] é igual a:

a) [illegible]  b) - [illegible]  c) 20  d) -20  e) [illegible]

Q11. (Ufam) Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ Os valores de **k** que tornam nulo o determinante da matriz A − kI, sendo **I** a matriz identidade, são:

a) 0 e 5
b) -2 e 4
c) 0 e 4
d) -4 e 2
e) -4 e 0

Q12. (Unit-SE) Se o determinante $\begin{vmatrix} [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ é igual a 5, então o valor de **x** é:

a) − [illegible]  b) − [illegible]  c) − [illegible]  d) [illegible]  e) [illegible]

Q13. (UFU-MG) Considere as matrizes A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} [illegible]-1 & 8 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ . Para que o determinante da matriz A . $B^t$, em que $\mathbf{B^t}$ denota a matriz transposta da matriz **B**, seja igual a 138, o valor de **x** será igual a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

Q14. (Unirio-RJ) Considere a matriz A= $\begin{bmatrix} [illegible] & -6 & [illegible] \\ [illegible] & 2[illegible] & 1 \\ 0 & 3 & [illegible] \end{bmatrix}$ . Sejam **f** e **g** função definidas por f(x) = $\sqrt{\det [illegible]}$ e g(x) = x − 1. Calcule todos os valores de **x** reais tais que f(x) = g(x).

Q15. (Ufscar − SP) Seja A = ($a_{ij}$) uma matriz quadrada de ordem 3 tal que, $a_{ij}$ = [illegible], com p inteiro positivo. Em tais condições, é concreto afirmar que, necessariamente, det A é múltiplo de:

a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 11

Q16. (Uneb-BA) O número de elementos inteiros do conjunto solução da inequação [illegible] $\geq 0$ é:

a) 0  b) 1  c) 2  d) 3  e) 4

# SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## Equação linear

Denomina-se equação linear toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que:

$a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ são os coeficientes da equação;
$x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ são as incógnitas e
$b$ é o termo independente.

Uma n-upla ordenada, isto é, uma seqüência de $n$ números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ se, ao substituir-se $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ respectivamente por $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

### Verificando uma solução de uma equação linear

- Verifique se (1, ï 2, 2) é solução da equação linear 2x ï y + 2z = 8.

  Substituindo-se x, y e z por 1, ï 2, e 2, respectivamente, obtém-se a sentença 2(1) ï (ï 2) + 2.2 = 8, que é verdadeira. Portanto, o terno ordenado (1, ï 2, 2) é uma solução da referida equação.

## Sistemas de equações lineares

Chama-se sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ a todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma solução do sistema é uma n-upla ordenada de números $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que satisfaz, simultaneamente, todas as m equações.

Um sistema de equações lineares pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$, em que

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada de matriz dos coeficientes, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Pode-se, também, associar ao sistema a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$, denominada matriz ampliada do sistema.

Se a matriz dos termos independentes é uma matriz nula, então o sistema é denominado **sistema linear homogêneo**.

## Sistemas equivalentes

Dois sistemas são ditos **equivalentes** quanto admitem o mesmo conjunto solução.

Pode-se transformar um dado sistema num sistema equivalente, mais simples de se resolver, a partir da aplicação de uma ou mais das seguintes transformações elementares:

**1ª) Troca de duas equações de posição entre si.**

Os sistemas $S_1 = \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$ são equivalentes pois, de um para o outro, apenas trocou-se a 1ª e 2ª equações de posição.

Seu conjunto solução é S = {(3,1)}.

**2ª) Multiplicação de uma das equações por uma constante não nula.**

Os sistemas $S_1 = \begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} -x - y = -10 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ são equivalentes pois apenas multiplicou-se a 1ª equação do sistema $S_1$ pela constante ï 1 para obter-se a 1ª equação do sistema $S_2$.

Seu conjunto solução é S = {(8,2)}.

**3ª) Multiplicação de qualquer equação por uma constante não nula e soma do resultado a outra equação do sistema.**

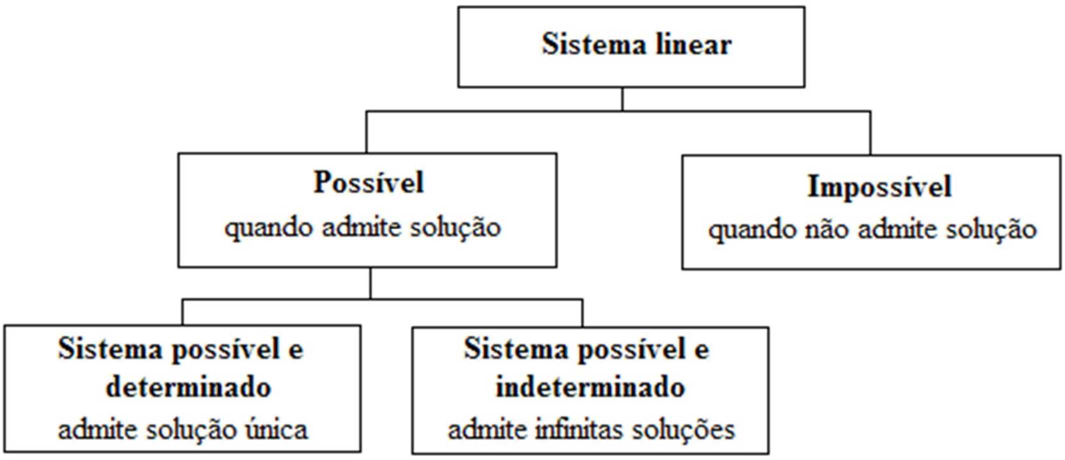
Os sistemas $S_1 = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 8x - y = 5 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 0x - 5y = -15 \end{cases}$ são equivalentes pois a 2ª equação do sistema $S_2$ foi obtida pela soma da 2ª equação de $S_1$ com o produto da 1ª equação de $S_1$ pela constante ï 4.

Seu conjunto solução é S = {(1,3)}.

Vale ressaltar que as transformações elementares apresentadas podem, perfeitamente, ser aplicadas às linhas da matriz ampliada associada a um sistema.

## Classificação de um sistema linear

Quanto ao número de soluções, um sistema linear pode ser classificado da seguinte forma:



## Resolução de um sistema linear através da Regra de Cramer

A regra de Cramer foi desenvolvida pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752). Trata-se de uma regra prática utilizada na resolução de sistemas lineares em que o número de equações é *igual* ao número de incógnitas.

Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e seja D o determinante associado à matriz dos coeficientes, isto é, $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Seja, ainda, o determinante $Dx_i$ , $1 \leq i \leq n$, obtido quando se substitui, no determinante D, a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes.

Se o determinante D é diferente de zero, o sistema é *possível e determinado* e seu conjunto solução é $S = \left\{ \left( \frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D} \right) \right\}$.

Se $D = D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xn} = 0$, o sistema será *possível e indeterminado*, sendo que, para $n \geq 3$, tal condição só será válida se não houver equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes não-proporcionais.

Se D = 0 e existe $Dx_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, o sistema será *impossível*.

### Resolvendo e discutindo um sistema de equações lineares pela regra de Cramer

- Utilizando a regra de Cramer, resolva e classifique o sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -4 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = -12 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = -8$$

Logo, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow x = 1;$ $\quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-4} \Rightarrow y = 3$ $\quad e\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{-8}{-4} \Rightarrow z = 2$
.

Portanto, o sistema é possível e determinado e seu conjunto solução é S={(1, 3, 2)}.

- Determine p de modo que o sistema $\begin{cases} 4x + (p-2)y = 0 \\ (p+1)x + 7y = 10 \end{cases}$ seja impossível.

Para que o sistema seja impossível, deve-se ter D = 0 e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$. Logo:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & p-2 \\ p+1 & 7 \end{vmatrix} = -p^2 + p + 30$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & p-2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = -10p + 20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ p+1 & 10 \end{vmatrix} = 40$$

D = 0 ⇒ p = ï 5 ou p = 6.

Como para ambos os valores de p o determinante $D_x$ é diferente de zero, ambos fazem com que o sistema seja impossível.

## Sistemas homogêneos

Denomina-se sistema linear homogêneo aquele em que todos os termos independentes são nulos.

Por exemplo, o sistema linear $S = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ é homogêneo.

Todo sistema homogêneo é possível, uma vez que admite, pelo menos, a solução trivial S = {(0, 0, ..., 0)}.

Se, além da solução trivial, o sistema linear homogêneo admitir alguma solução não trivial, ele será *indeterminado*.

Caso contrário, será *determinado*.

Para a discussão de um sistema linear homogêneo de n equações com n incógnitas, é suficiente a análise do determinante ñDò associado à matriz dos coeficientes das incógnitas, a saber:

- Se D ≠ 0 ⇒ Sistema possível e determinado;
- Se D = 0 ⇒ Sistema possível e indeterminado

**Criando condições para que um sistema linear homogêneo admita soluções não triviais**

- Determine λ para que o sistema $\begin{cases} x + y - \lambda z = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ x + (\lambda+1)y + z = 0 \end{cases}$ admita outras soluções além da solução trivial (0,0,0).

  O sistema admitirá outras soluções além da solução trivial se for possível e indeterminado.

  Basta, portanto, que D = 0, ou seja;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

## Questões propostas

Q1. Aplicando a regra de Cramer, resolva os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 4x - y + 2z = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{x+1} + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^{y+1} + 2^{z+1} = 2 \end{cases}$

Q2. Calcular o valor de **a** para que o sistema $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ tenha somente a solução trivial.

Q3. Determine α de modo que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ \alpha x + y = 4 \end{cases}$ seja impossível.

Q4. (Uerj-adaptado) João contou os coelhos, os patos e os bois que havia em sua fazenda, obtendo um total de 340 animais. A seguir, verificou que o número de coelhos era o triplo do de patos e que o número de bois excedia em 20 unidade o total de coelhos e patos. Determine o número de patos que há na fazenda.

## Resolução de um sistema linear através de escalonamento

O escalonamento é um processo de resolução de sistemas lineares que consiste na aplicação de transformações elementares num dado sistema a fim de obter um sistema equivalente, mais simples de ser solucionado, uma vez que, nesse novo sistema, o número de coeficientes de incógnitas nulos, que antecede o primeiro coeficiente não nulo, aumenta, de equação para equação.

São exemplos de sistemas escalonados:

$$S_1 = \begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ -y - 5z = -25 \\ -28z = -140 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} 9x - 2y + 3z - w = 1 \\ -y - 2z + 4w = 6 \\ 5z + 3w = -4 \\ 0w = 5 \end{cases}$$

Ao observarmos os sistemas acima, verificamos que, de uma equação para a seguinte, sempre ñdesapareceò uma incógnita, da esquerda para a direita, o que faz com que a quantidade de zeros aumente, de uma linha para outra, na matriz ampliada associada ao sistema, conforme podemos perceber nas matrizes abaixo, correspondentes aos sistemas $S_1$ e $S_2$, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -25 \\ 0 & 0 & -28 & -140 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 9 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solucionar um sistema escalonado é uma tarefa bastante simples.

Na 3ª equação do sistema $S_1$, anteriormente apresentado, é fácil perceber que z = 5. Substituindo z por 5, na 2ª equação, concluímos que y = 0. Substituindo y e z por 0 e 5, respectivamente, na 1ª equação, obtemos x = ï 2.

Portanto, S = {(ï 2, 0, 5)}.

No sistema $S_2$, notamos que não existe valor para w tal que 0.w = 5. Portanto, o sistema $S_2$ é impossível, ou seja, S = $\varnothing$.

A essa altura, caro leitor, você já deve estar se perguntando como é possível escalonar um sistema linear.

Conforme dissemos anteriormente, implementamos transformações elementares às equações do sistema (ou às linhas da matriz ampliada associada a ele).

A fim de que você se acostume com a notação empregada na resolução dos seguintes exemplos, faremos uma breve explicação sobre ela, a saber:

- ($L_i \leftrightarrow L_j$) significa que a i-ésima linha e a j-ésima linha foram permutadas, isto é, trocaram de posição entre si.
- ($L_i \rightarrow kL_i$) significa que a i-ésima linha foi multiplicada pela constante não nula k.
- ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$) significa que a i-ésima linha foi substituída pela soma da i-ésima linha com o produto da j-ésima linha pela constante não nula k.

**Escalonando sistemas**

- Escalone e resolva o sistema $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x+3y+z=7 \end{cases}$.

Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ a matriz ampliada associada ao sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2 \to L_2 - 3L_1) \\ (L_3 \to L_3 - 2L_1) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{48}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \to L_3 - \frac{1}{7}L_2) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \to 7L_3) \end{matrix}$$

Logo, $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -7y+5z=1 \\ 16z=48 \end{cases}$ é um sistema escalonado equivalente ao sistema dado no exercício.

Resolvendo-o ñde baixo para cimaò, sua última equação fornece o valor da incógnita z (z = 3).

Substituindo-se o valor de z na segunda equação:

$-7y+5z=1 \Rightarrow -7y+15=1 \Rightarrow y=2$

Substituindo-se os valores de z e y na primeira equação:

$x+2y-z=0 \Rightarrow x+4-3=0 \Rightarrow x=-1$

Logo, S = {(-1, 2, 3)}.

- Escalone e resolva o sistema $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

A matriz ampliada associada ao sistema é $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} (L_1 \to L_1 - L_3)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2 \to L_2 + L_1) \\ (L_3 \to L_3 - 2L_1) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_3)$$

O sistema $\begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ \quad 4y + 5z = 6 \\ \qquad 0z = -1 \end{cases}$ está escalonado e é equivalente ao sistema dado.

Como não existe z real tal que 0.z = ï 1, conclui-se que o sistema é impossível e, portanto, S = ∅.

- Escalone e resolva o sistema $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$.

A matriz ampliada associada ao sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \; L_2 \to (L_2 - 2L_1)$$

O sistema $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ \qquad z = 5 \end{cases}$ está escalonado e é equivalente ao sistema dado.

Substituindo z por 5, na 1ª equação, obtem-se a equação x + y = 3, que possui infinitas soluções. Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Atribuindo a x um valor arbitrário α, determina-se o valor de y em função de α.

Tem-se, assim, que y = 3 ï α.

Portanto, S = {(α, 3 ï α, 5), em que α ∈ IR} é a solução geral do sistema sendo que, para cada valor específico dado a α, obtém-se uma solução particular do referido sistema.

**Observações**:

- Todo sistema escalonado em que o número de equações é menor que o número de incógnitas é possível e indeterminado.
- Se, após escalonado, um sistema apresentar alguma linha do tipo (0 0 0 ... 0 k), com k ≠ 0, o sistema será impossível.

**Discutindo um sistema linear**

- Discuta o sistema $\begin{cases} x - 2y + pz = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = q \end{cases}$ em função dos parâmetros p e q.

Seja D = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & p \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ o determinante associado à matriz dos coeficientes do referido sistema.

É sabido que, se D ≠ 0, o sistema é possível e determinado.

$$D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & p \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow p \neq 2.$$

Logo, se p ≠ 2, o sistema será possível e determinado.

Se p = 2, tem-se o sistema $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = q \end{cases}$ que é equivalente ao sistema escalonado $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ \quad y - 3z = 1 \\ \qquad 0z = q + 1 \end{cases}$.

A igualdade presente na 3ª equação desse último sistema será verdadeira se q+1 = 0 e, portanto, q = ï 1; o que fará com que o sistema seja possível e indeterminado.

Na hipótese contrária (q ≠ ï 1), o sistema será impossível.

Em resumo:

- Se p ≠ 2, o sistema será possível e determinado.
- Se p = 2 e q = ï 1, o sistema será possível e indeterminado.
- Se p = 2 e q ≠ ï 1, o sistema será impossível.

## Questões propostas

Q5. (Ufac) Em relação ao sistema linear (□): $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 4 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$, qual é a única proposição errada dentre as dos itens abaixo?

a) A matriz dos coeficientes de (□) é inversível
b) O conjunto solução de (□) é finito
c) O sistema (□) é possível e determinado
d) O método de G. Cramer(1704-1752) é preciso na obtenção do conjunto solução de (□).
e) Não existem sistemas lineares equivalentes a (□).

Q6. (UFV-MG) No parque de diversões Dia Feliz, os ingressos custam R$10,00 para adultos e R$6,00 para crianças. No último domingo, com a venda de 400 ingressos, a arrecadação foi de R$3000,00. A razão entre o número de adultos e crianças pagantes foi:

a) $\frac{□}{□}$ b) $\frac{□}{□}$ c) $\frac{□}{□}$ d) $\frac{□}{□}$ e) $\frac{□}{□}$

Q7. (UFSM-RS) A remoção de um volume de 540m³ de entulho da construção de uma obra viária foi feita com dois tipos de caminhões. O primeiro tem capacidade de carga de 6m³, com custo de R$30,00 por viagem. O segundo tem capacidade de carga de 10 m³, com custo de R$40,00 por viagem. Sendo destinados R$2400,00 para a remoção do entulho, as quantidades de viagens necessárias para os caminhões do primeiro e do segundo tipos renovarem completamente o entulho são, respectivamente:

a) 30 e 40
b) 30 e 50
c) 40 e 50
d) 40 e 40
e) 40 e 30

## Questões complementares

Q8. (Uniube-MG) Ao descontar um cheque, recebi somente notas de R$10,00 e R$50,00, em um total de 14 notas. Quando fui conferir, descobri que o caixa havia se enganado, pois recebi tantas notas de R$50,00 quanto as de R$10,00 que deveria ter recebido e vice-versa. Percebido o erro, verifiquei que, se gastasse R$240,00 da importância recebida, ainda ficaria com o valor do meu cheque. Qual era o valor do meu cheque?

a) R$540,00 b) R$300,00 c) R$480,00 d) R$240,00

Q9. (Unicamp ï SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00. O quilo de castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo da castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa situação descrita acima.
b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

Q10. (UFPB) O sistema

$$\begin{array}{l} \square - \square = -1 \\ \square\ \square + \square = 1 \\ \square - 2\square = 1 \end{array}$$

tem conjunto solução:

a) Vazio
b) Unitário
c) Formado por dois elementos
d) Formado por três elementos
e) Infinito

Q11. (FGV-SP) O sistema linear

$$\begin{array}{l} \square + \square\square - 2\square = 0 \\ \square\square + \square + \square = 0 \\ \square - \square - \square = 0 \end{array}$$

admite solução não trivial, se:

a) $\square = -2$
b) $\square \neq -2$
c) $\square = 2$
d) $\square \neq 2$
e) $\square \in \square$ o conjunto dos números reais.

Q12. (UFG-GO) Um sistema linear tem a seguinte matriz de coeficientes $\square\begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & \square & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix}\square$

Uma condição necessária e suficiente sobre **k** para que o sistema tenha uma única solução é:

a) k ≠ 4
b) k ≠ $\frac{\square\square}{\square\square}$
c) k ≠ 0
d) k ≠ $-\frac{\square\square}{\square\square}$
e) k ≠ ï 4

Q13. (Ufam) Dado o sistema $\square\begin{matrix} \square + \square - \square = 1 \\ \square + \square + \square = 1 \end{matrix}$ nas variáveis x, y e z, é correto afirmar que:

a) Tem uma solução com z-1
b) Não tem solução
c) Tem exatamente três soluções
d) Tem uma solução única x=0, y=1 e z=0
e) Tem uma infinidade de soluções.

Q14. (UFCG-PB) O gerente de um restaurante propôs a seu patrão a seguinte promoção: quem comprar os três pratos sugeridos receberá o primeiro gratuitamente. As quantidades **x, y** e **z** são os preços das iguarias que constituem o prato.
Primeiro prato: uma porção da primeira iguaria, uma porção da segunda iguaria e duas porções da terceira iguaria, por zero unidade monetária.
Segundo prato: duas porções da primeira iguaria, uma porção da segunda iguaria e $(2^{\square^2\square\square})$porções da terceira iguaria, por uma unidade monetária.
Terceiro prato: uma porção da primeira iguaria, duas porções da segunda iguaria e duas porções da terceira iguaria, por $\log_3 \square\frac{\square}{\square^2\square\square}\square$unidades monetárias. Antes de anunciar sua promoção para o público, o patrão pediu ao gerente que analisasse para ele aquela proposta. O gerente montou o sistema $\square\begin{matrix} \square + \square + 2\square = 0 \\ 2\square + \square + \square 2^{\square^2\square\square}\square z = 1 \\ \square + 2\square + 2\square = \square\square\square_{\square}\square\frac{\square}{\square^2\square\square}\square \end{matrix}$, onde a é um parâmetro de ajuste do preço do prato, e fez a seguinte análise:

I) A promoção é possível e existe um único preço para as iguarias se a ≠ 1.
II) A promoção é possível para qualquer preço das iguarias se a = -1.
III) A promoção não é possível quando a =2.

Está(ao) correta(s) a(s) seguinte(s) afirmação(ões) do gerente:

a) I, II e III
b) I e III

c) II e III
d) I e II
e) I

Q15. (ITA-SP) A condição para que as constantes reais **a** e **b** tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} \square + \square + 3\square = 2 \\ \square\square + 2\square + 5\square = 1 \\ 2\square + 2\square + \square\square = \square \end{cases}$$

é:

a) a − b ≠ 2
b) a+b=10
c) 4ª − 6b=0
d) $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
e) a . b = 24

## Gabarito – ESTUDO DAS MATRIZES

Q1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Q2. $a_{32} + a_{42} = -4$.

Q3. a = 2 e b = 3.

Q4. $X = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Q5. $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$

Q6. $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Q7. $\square^{\square\square} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Q8. a) Instante 2 do dia 4.

b) 37,3 º

Q9.d

Q10.d

Q11. 94

Q12. b

Q13. a

Q14. d

Q15. c

Q16.d

Q17. a

Q18. a

## Gabarito ï DETERMINANTE

Q1. a) 10 b) 49 c) -47

Q2. a) □ = 2 □□ □ = − □/□

b) □ = 1 □□ □ = −4

Q3. y = 0

Q4. 171

Q5. □/□

Q6. 5

Q7. d

Q8. c

Q9. d

Q10. d

Q11. d

Q12. b

Q13. a

Q14. □ ∈ □ | □ ≥ 1

Q15. c

Q16. e

## Gabarito ï SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Q1. a) $S = \{(1,2)\}$

b) $S = \{(2,0,5)\}$

c) $S = \{(1,-1,1)\}$

d) $S = \{(2,1,0)\}$

Q2. $\{a \in IR \mid a \neq 1\}$

Q3. $\alpha = \frac{3}{2}$

Q4. 40 patos

Q5.e

Q6.a

Q7. e

Q8.b

Q9.

□ + □ + □ = 0,5

a)□ □ − 3□ + □ = 0

5□ + 20□ + 16□ = 5,75

b)Amendoim: 250g; castanha de caju: 125g; castanha-do-pará: 125g

Q10.a

Q11. a

Q12.e

Q13.e

Q14.c

Q15.a