

## **ESTUDO E SIMULAÇÃO DE OSCILADORES CAÓTICOS E SISTEMAS DINÂMICOS CONECTADOS EM REDE**

Wanderley C. da Silva Junior <sup>1</sup>; Arthur N. Montanari<sup>2</sup>; Everthon S. Oliveira<sup>3</sup>; Leandro Freitas<sup>4</sup>;

1 Wanderley Correa da Silva Junior (CNPq), Engenharia de Controle e Automação, IFMG Campus Betim, Betim – MG; [junior.wanderley.2000@gmail.com](mailto:junior.wanderley.2000@gmail.com)

2 Arthur N. Montanari, Université du Luxembourg, Esch-sur-Alzette, Luxemburgo

3 Everthon de Souza Oliveira, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte – MG

4 Orientador: Leandro Freitas, Campus Betim; [leandro.freitas@ifmg.edu.br](mailto:leandro.freitas@ifmg.edu.br)

### **RESUMO**

O uso de uma plataforma experimental para validação de resultados teóricos e computacionais oferece o meio necessário para a investigação da robustez de ferramentas de análise e controle propostas com relação à presença de erros de modelagem, incertezas paramétricas, perturbações e ruídos. Este trabalho faz parte de um projeto de construção de uma plataforma experimental para aplicação e estudo de robustez de potenciais ferramentas desenvolvidas, utilizando osciladores conectados em rede. Para desenvolver o projeto é necessário compreender as principais características de um oscilador caótico e como um oscilador pode interagir e influenciar o comportamento dinâmico de outros osciladores. O objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de sistemas dinâmicos não lineares, alguns com regime caóticos, e apresentar resultados de simulação numérica desses sistemas em diferentes cenários. Para essa análise, foram escolhidos osciladores comumente utilizados na literatura científica no estudo de redes complexas. Como o sistema de Rossler, Lorenz, Chua, Van der Pol e Kuramoto. Os resultados numéricos evidenciaram algumas características fundamentais e comportamentos de sistemas não lineares e caóticos. Os gráficos gerados mostram a sensibilidade que os sistemas caóticos possuem com relação às condições iniciais. E também a influência dos parâmetros das equações de estado no comportamento dinâmico do sistema, determinando, por exemplo, seu regime como caótico ou periódico. Foram obtidos resultados numéricos para sistemas dinâmicos não lineares acoplados de diferentes maneiras em redes de osciladores. Foi avaliada a influência da topologia da rede, da força de acoplamento entre os osciladores e das características dinâmicas dos osciladores envolvidos. No caso das redes de osciladores, quanto mais forte é o acoplamento (ou conexões) entre os sistemas, maior a chance de sincronizar mais osciladores na rede dinâmica. Sendo essa influência determinada pela topologia de rede e com quantos osciladores estão conectados.

### **INTRODUÇÃO:**

Vários sistemas atuais são estudados por meio de modelos dinâmicos conectados em rede (Arenas et al., 2008). Denominadas “redes dinâmicas complexas”, esses modelos são usados para estudar a robustez de sistemas elétricos de potência (Schäfer et al., 2018), compreender a dinâmica de propagação de doenças (Schimit e Monteiro, 2009) e epidemias (Scabini et al., 2020), dentre outras aplicações.

Recentemente, foram desenvolvidas técnicas de análise e controle de sistemas dinâmicos interconectados que se aplicam a redes dinâmicas, dentre as quais pode-se citar a análise de observabilidade em redes dinâmicas (Aguirre, Portes e Letellier, 2018), o uso de observabilidade funcional em redes dinâmicas para alocação ótima de sensores (Montanari, 2021), e a proposta de uma definição de fase para avaliação da qualidade de sincronismo entre sistemas dinâmicos não lineares.

Este trabalho faz parte de um projeto de construção de uma plataforma experimental para aplicação e estudo de robustez de potenciais ferramentas desenvolvidas. Para isso, é necessário compreender melhor o comportamento dos sistemas dinâmicos não lineares. Assim o objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de sistemas dinâmicos não lineares, alguns caóticos, e mostrar os resultados da simulação numérica desses sistemas em diferentes cenários. Os osciladores escolhidos foram o de Rossler, Lorenz, Chua, Van der Pol e Kuramoto. Sendo o último utilizado para estudar o comportamento desses osciladores quando acoplados em redes com diferentes topologias e formas de interação.

O oscilador de Rossler (Rössler e Letellier, 1976) é um sistema de três equações diferenciais ordinárias, não lineares, originalmente estudados por Otto Rössler. O oscilador de Lorenz (Lorenz, 1963) foi desenvolvido por Edward Lorenz a partir das equações simplificadas de convecção que ocorrem nas equações da atmosfera. Também foi estudado o sistema de Chua (Chua, et al, 1986) que é um circuito

eletrônico que exibe comportamento caótico e foi apresentado por Leon Ong Chua. E o oscilador de Van der Pol (Van der Pol, 1920) que é um oscilador com amortecimento não linear proposto pelo engenheiro eletricitista e físico holandês Balthasar Van der Pol. E por fim o modelo de Kuramoto (Kuramoto, 1984) que é um modelo matemático usado para descrever a sincronização entre sistemas desenvolvido por Yoshiki Kuramoto.

Os osciladores caóticos são descritos a partir de variáveis de estado, em que seu comportamento é regido pelas equações de estado, definida pela derivada temporal das variáveis de estado. Como por exemplo as equações de estado que definem o oscilador de Rossler:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay,$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c),$$

$$a = \{0, 398; 0, 298\}, b = 2, c = 4. \quad (1)$$

Na Equação (1)  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as variáveis de estado;  $b = 2$  e  $c = 4$  são parâmetros constantes do sistema; E  $a$  é um parâmetro de bifurcação, que será usado com dois valores distintos  $a = \{0, 398; 0, 298\}$ . Os parâmetros são valores constantes que compõem o sistema, e podem determinar o regime de oscilação do sistema. Assim um certo valor de  $a$  (um dos parâmetros do sistema de Rossler) descreve um oscilador caótico, e outro valor para esse mesmo parâmetro pode gerar um oscilador periódico. Como um atrator caótico é sensível às suas condições iniciais, elas são bastante importantes para simular o sistema, pois pequenas diferenças nas condições iniciais, como as causadas por erros de arredondamento em computação numérica, produzem resultados divergentes.

O modelo de Kuramoto foi criado para descrever sincronização entre sistemas. Cada um dos osciladores é considerado como tendo sua própria frequência natural ( $\omega_i$ ) e cada um é acoplado de uma determinada maneira a outros osciladores. Sua equação é dada por:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{k}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2)$$

Em que  $\omega_i$  representa a frequência natural, que é a frequência na qual um sistema tende a oscilar na ausência de qualquer força motriz ou de amortecimento, do oscilador analisado;  $\theta_i$  representa a fase do  $i$ -ésimo oscilador analisado;  $\theta_j$  representa a fase do  $j$ -ésimo oscilador, acoplado ao analisado.  $N$  representa o número de osciladores conectados e  $K$  representa a força de acoplamento.

Com o intuito de se ter uma melhor análise do sistema de Kuramoto é necessário colocá-los em redes com diferentes topologias e forças de conexão. Essas redes são um conjunto de osciladores e suas conexões. Como há diversas maneiras de realizar essas conexões, existem diferentes tipos de redes. Entre os principais tipos está a conhecida como "Small World" (Watts e Strogatz, 1998), onde grande parte das conexões são estabelecidas entre os vértices mais próximos, mas com a presença de algumas conexões distantes. Outra muito utilizada é a "Scale Free" (Price, 1965), onde alguns osciladores possuem muitas ligações, contrastando com outros osciladores que possuem poucas conexões, podendo até não ter nenhuma conexão. E outra conhecida é a "Fully Connected", onde todos os osciladores estão conectados a todos os outros osciladores.

Este trabalho explora as principais características de sistemas dinâmicos não lineares, sendo alguns deles caóticos, como a influência dos parâmetros e das condições iniciais. Esse trabalho também explora o funcionamento do sistema de Kuramoto em diferentes redes dinâmicas.

## METODOLOGIA:

Para estudar e simular os osciladores foi desenvolvido no software Jupyter Notebook um código em Python, que é uma linguagem de programação de alto nível, interpretada de script, imperativa, orientada a objetos, funcional, de tipagem dinâmica e forte. Nesse código foram criadas funções para cada oscilador utilizando as variáveis de estado de cada sistema e também códigos de geração de gráficos dessas funções. Com a função de simplificar o código, foram usadas bibliotecas como Numpy, que suporta o

processamento de grandes, vetores e matrizes multidimensionais, juntamente com uma grande coleção de funções matemáticas de alto nível, a Matplotlib, que serve para criação de gráficos e visualizações de dados em geral. E para realizar os acoplamentos nos osciladores foi usada a biblioteca Networkx, que é um pacote Python para a criação, manipulação e estudo da estrutura, dinâmica e funções de redes complexas.

O primeiro oscilador simulado é o de Van der Pol onde suas equações são:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \mu(1 - x^2)y - x.\end{aligned}\quad (3)$$

A partir das equações de estado, foi realizada uma integração numérica, usando método de Runge-Kutta de 4ª ordem, para cálculo da solução  $x(t)$  e  $y(t)$  a partir das condições iniciais  $x(0)$  e  $y(0)$ . A solução da equação é a evolução dos estados  $x$  e  $y$  ao longo do tempo.

O oscilador de Rossler foi simulado usando a Equação (1). Nesse caso foi variado o parâmetro  $a$ , mantendo os outros parâmetros iguais, para analisar a influência desse parâmetro no regime dinâmico do sistema.

Para o sistema de Lorenz primeiro identificando as suas equações e os valores dos parâmetros. Após isso, o oscilador foi simulado no software em Python.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \\ a &= 10, b = 28, c = 2,667.\end{aligned}\quad (4)$$

O oscilador de Chua, desenvolvido a partir de um circuito elétrico, possui uma função que descreve a resposta elétrica do resistor não linear. A partir de suas equações (5), foi simulado dois osciladores com pequenas diferenças nos valores das condições iniciais, para poder analisar a influência delas no sistema.

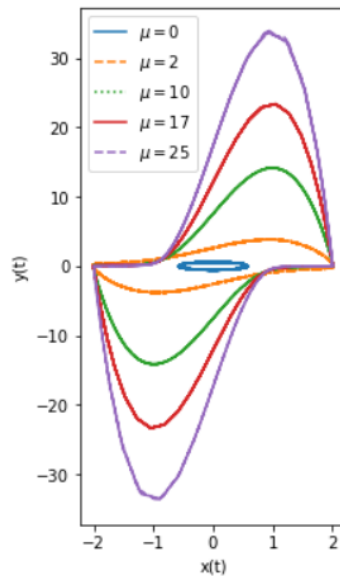
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -b y, \\ f(x) &= Cx + 0.5(R - C)(|x1 + 1| - |x1 - 1|), \\ R &= -2,143, C = -0,714, a = 12.395, b = 25.\end{aligned}\quad (5)$$

Devido ao fato que o sistema de Kuramoto ser um modelo para o comportamento de um grande conjunto de osciladores acoplados, primeiro foi criando as conexões entre eles. Com o auxílio da biblioteca em Python chamada "Networkx" foi possível conectar os osciladores de maneiras diferentes.

No sistema de Kuramoto foi utilizado 3 tipos de redes de conexões diferentes, a primeira foi a "Scale free" que é uma rede complexa em que a maioria dos nodos (osciladores) tem poucas ligações, contrastando com a existência de alguns nodos que apresentam um elevado número de ligações. A segunda conexão foi a "Fully Connected". Nesse sistema todos os osciladores estão conectados com todos, por isso chamado de totalmente conectado. E por fim a última conexão usada foi o modelo de Watts-Strogatz (Watts e Strogatz, 1998), que é um modelo aleatório de geração de grafos com propriedades de pequeno mundo. Para cada caso foi gerado gráficos de frequência e de fase de todos os 50 osciladores usados.

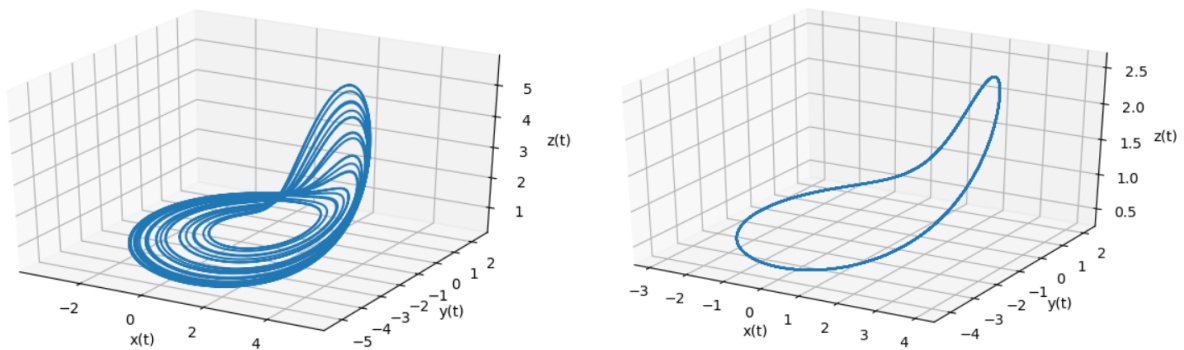
## RESULTADOS E DISCUSSÕES:

Com o gráfico presente na Figura 1 é possível perceber o comportamento dinâmico do oscilador de Van der Pol e a influência do valor de  $\mu$ . Quanto maior for o valor deste parâmetro maior será o esticamento nas laterais do sistema, e quanto menor for o valor, a trajetória ficará mais próxima de um círculo. No gráfico é possível ver que quando o valor de  $\mu$  é igual a 25 ele possui duas concavidades uma em cima e a direita no gráfico e outra abaixo e à esquerda do gráfico. Quando ele é igual a 0 não há nenhuma concavidade na trajetória do sistema.



**Figura 1: Retrato de fase para o oscilador de Van der Pol com diferentes valores de  $\mu$  (Equação 3).  
Fonte: Próprio autor.**

A Figura 2 mostra dois gráficos com valores diferentes de  $a$ , mantendo os outros parâmetros iguais, para analisar a influência desse parâmetro no regime dinâmico do sistema. Essa simulação mostra como o sistema é sensível aos parâmetros, onde uma simples variação no valor de  $a$  provocou uma mudança do oscilador caótico, tornando ele em um oscilador periódico. A Figura 2-a onde o valor de  $a$  é igual a 0,398. Porém ao mudar o valor de  $a$  para 0,298 faz com que o sistema se torne periódico, como mostrado na Figura 2-b. Isso mostra a sensibilidade aos parâmetros onde uma mudança de apenas de 0,1 modifica a forma da evolução dos estados do sistema.



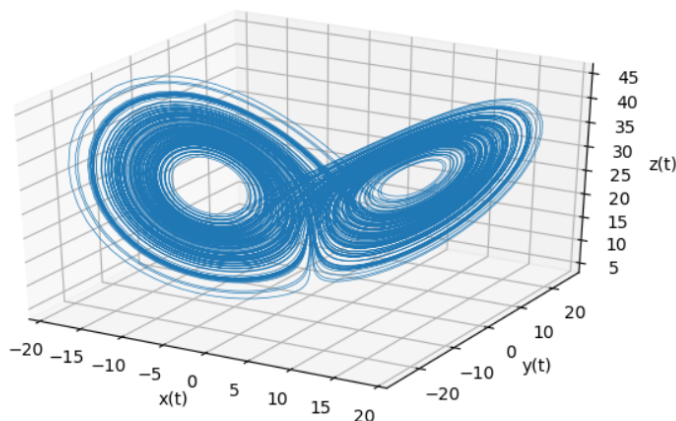
**a) simulação com  $a = 0,398$ ,**

**b) simulação com  $a = 0,298$**

**Figura 2: A trajetória do sistema de Rossler em 3 dimensões com dois valores de  $a$  (0,398 e 0,298).**

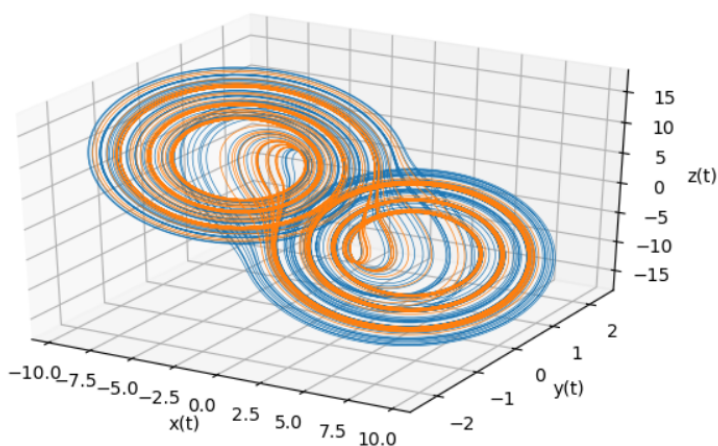
**Fonte: Próprio autor.**

Comparado com o oscilador de Rossler o regime oscilatório do sistema de Lorenz, presente na Figura 3 é diferente. No caso de Lorenz a trajetória realiza voltas em torno de dois pontos diferentes, criando uma certa simetria no sistema. Já no atrator de Rossler o sistema possui apenas um centro de rotação.



**Figura 3: A trajetória do sistema de Lorenz em 3 dimensões.  
Fonte: Próprio autor.**

Na Figura 4 estão representados dois sistemas de Chua, onde eles possuem condições iniciais diferentes. Com as condições iniciais de um oscilador são  $x_1(0) = 0,5688$ ,  $y_1(0) = 0,07734$ ,  $z_1 = 0,6084$  e do segundo oscilador são  $x_2(0) = 0,3688$ ,  $y_2(0) = 0,27734$ ,  $z_2 = 0,4084$ . Nessa simulação é possível ver a importância dos valores das condições iniciais, onde uma pequena diferença de valor de um oscilador para o outro eles possuem trajetórias diferentes. Apesar de, para as duas situações, a aparência do trajeto ser similar, eles passam em caminhos diferentes. No gráfico (Figura 4) é possível perceber que quase nenhuma linha azul passa sobre uma linha laranja. E outro ponto é que as linhas azuis estão mais espaçadas entre elas, já as laranjas estão mais próximas umas das outras. Demonstrando a sensibilidade do sistema aos valores das condições iniciais.

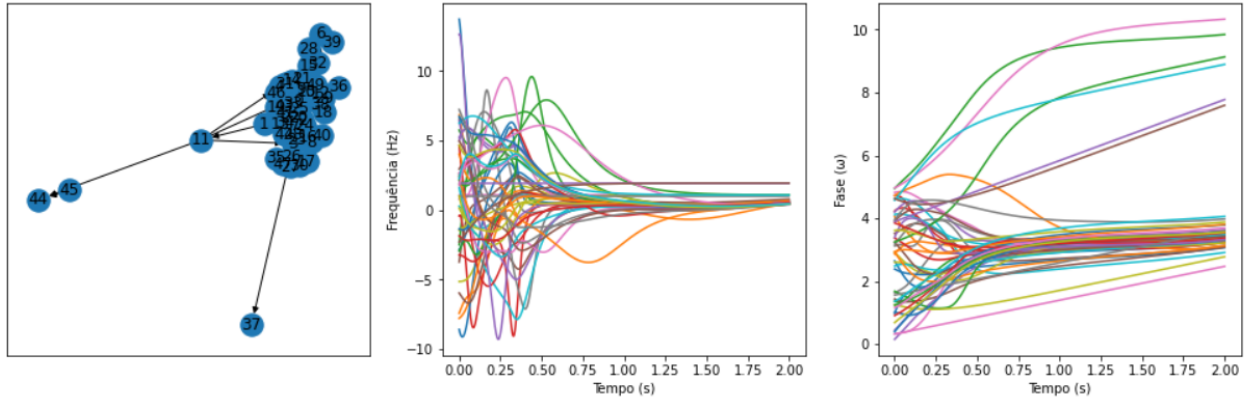


**Figura 4: Duas trajetórias distintas do sistema de Chua, simuladas a partir do mesmo sistema (Equação 6), mas com condições iniciais ligeiramente diferentes.  
Fonte: Próprio autor.**

A Figura 5 representa o sistema de Kuramoto com conexão em “scale free”. A Partir dos gráficos presente na Figura 5, principalmente o de frequência por tempo, é possível ver que a partir do tempo 1,25 segundos os osciladores estão quase em sincronismo, porém ainda há uma diferença significativa entre os valores finais de frequência de cada oscilador. Porém também se percebe que alguns osciladores tendem a sincronizar primeiro do que outros. Isso acontece pois no acoplamento utilizado alguns osciladores possuem



menos conexões do que outros, assim tendo menos influência e demorando mais para sincronizar com todos os outros osciladores.



a) Topologia da rede .

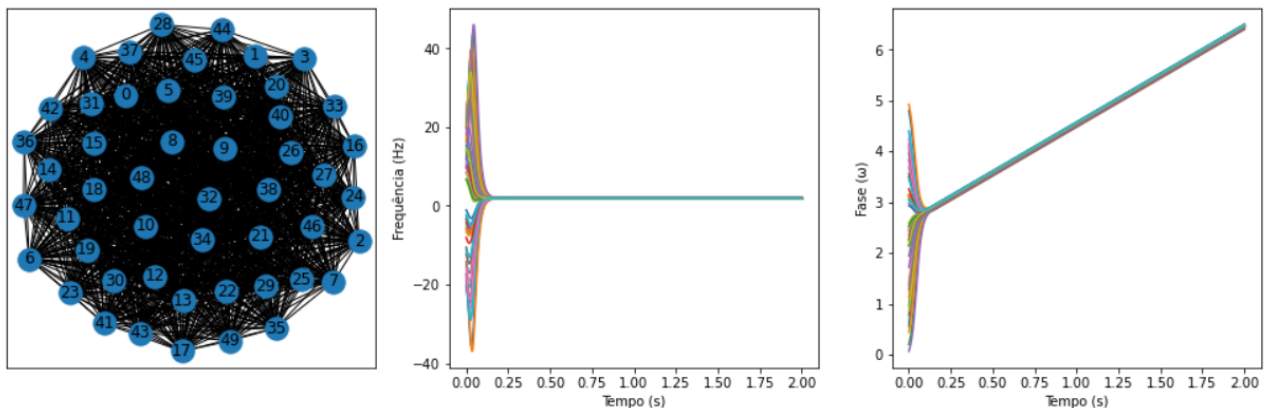
b) Evolução da frequência angular de cada oscilador.

c) Evolução da fase angular de cada oscilador.

**Figura 5: Resultado de uma simulação de uma rede “scale free” com 50 osciladores, simulados usando a Equação (2), com frequência angular natural de cada oscilador gerado de forma aleatória e força de acoplamento  $k = 5$ .**

Fonte: Próprio autor.

O segundo acoplamento utilizado foi o “Fully connected” (Figura 6). Como nesse sistema todos os osciladores estão conectados com todos a influência que um oscilador sofre é muito alta. Por isso o sistema tende a se sincronizar extremamente rápido. Onde todos os osciladores se sincronizam um pouco antes de 0,25 segundos após o início do sistema.



a) Topologia da rede .

b) Evolução da frequência angular de cada oscilador.

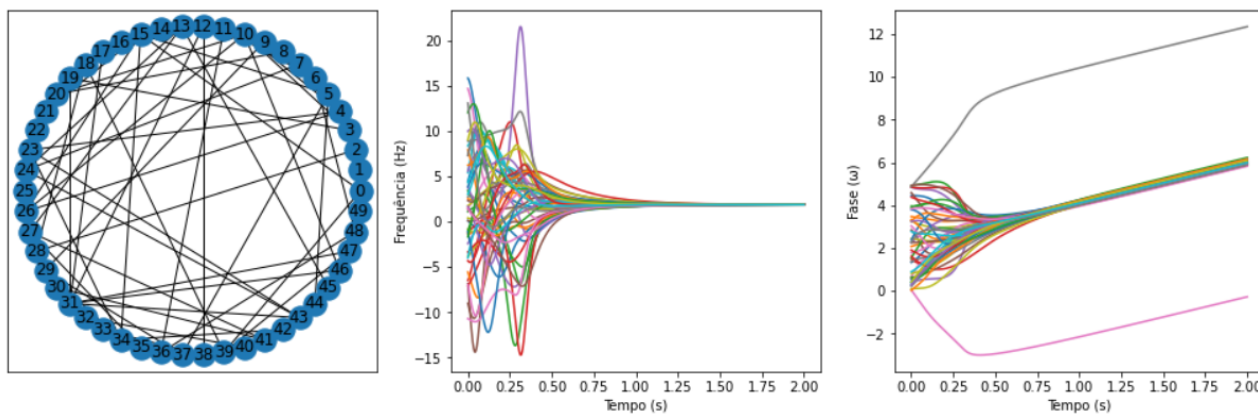
c) Evolução da fase angular de cada oscilador.

**Figura 6: Resultado de uma simulação de uma rede “fully connected” com 50 osciladores, simulados usando a equação (2), com frequência angular natural de cada oscilador gerado de forma aleatória e força de acoplamento  $k = 5$ .**

Fonte: Próprio autor.

O último de acoplamento estudado foi o modelo de Watts-Strogatz (Watts e Strogatz, 1998). Nesse sistema presente na Figura 7 os osciladores se sincronizam a partir de 0,75 segundos após o início do sistema, como é possível ver na Figura 6-b. Diferente do acoplamento em “scale free”, os osciladores tendem a sincronizar ao mesmo tempo, ou muito próximos. Isso ocorre pois todos possuem o menor número de conexões, sendo a influência que cada um sofre quase igual. Como no “scale free” alguns

osciladores possuem número diferentes de conexões para ou mais ou para menos, cada oscilador terá um tempo diferente para se estabilizar em relação ao sistema.



a) Topologia da rede .

b) Evolução da frequência angular de cada oscilador.

c) Evolução da fase angular de cada oscilador.

**Figura 6: Resultado de uma simulação de uma rede “Watts-Strogatz” com 50 osciladores, simulados usando a equação (2), com frequência angular natural de cada oscilador gerado de forma aleatória e força de acoplamento  $k = 5$ .**

**Fonte: Próprio autor.**

## CONCLUSÕES:

Este trabalho descreveu o comportamento de osciladores não lineares e algumas das suas principais características. Foi possível entender a importância dos parâmetros de um sistema caótico, onde uma pequena variação de um parâmetro pode transformar um atrator caótico em um periódico. Também foi observado a sensibilidade do sistema às suas condições iniciais. Osciladores com as mesmas variáveis de estado e mesmo valores de parâmetros, porém com condições iniciais ligeiramente diferentes, geram gráficos com trajetórias diferentes.

Com a ajuda do modelo de Kuramoto foi possível entender como os osciladores se comportam acoplados a outros osciladores. Em um sistema onde há alguns osciladores com muitas conexões e outros com poucas conexões, a sincronização tendem a demorar um pouco mais a acontecer. Além de os osciladores chegarem a essa sincronização em tempos diferentes. Já em uma rede onde todos os osciladores possuem o mesmo número de conexões, os osciladores tendem a sincronizar ao mesmo tempo. E para se ter uma sincronização, extremamente rápida, basta conectar todos os osciladores a todos os outros na rede.

Esse trabalho foi necessário para compreender melhor o comportamento dos sistemas dinâmicos não lineares. Os objetivos futuros, a partir desse trabalho, é construir uma plataforma experimental para aplicação e estudo de robustez de potenciais ferramentas desenvolvidas, utilizando osciladores não lineares e caóticos.

## AGRADECIMENTOS:

Os autores agradecem o apoio do CNPq (409487/2021-0), Fapemig (APQ-00781-21) e IFMG.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Aguirre, L. A., Portes, L. L., & Letellier, C. (2018). Structural, dynamical and symbolic observability: From dynamical systems to networks. *PLOS ONE*, 13(10), e0206180. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0206180>

Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., & Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3), 93–153. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.002>

Montanari, A. N. (2021). Observability of Dynamical Networks. 150 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021. Acesso em 07/04/2021. Disponível em <https://ppgee.ufmg.br/defesas/1597D.PDF>

Scabini, L. F. S., Ribas, L. C., Neiva, M. B., Junior, A. G. B., Farfán, A. J. F., & Bruno, O. M. (2021). Social interaction layers in complex networks for the dynamical epidemic modeling of COVID-19 in Brazil. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 564, 125498. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125498>

Schäfer, B., Witthaut, D., Timme, M., & Latora, V. (2018). Dynamically induced cascading failures in power grids. *Nature Communications*, 9(1), 1975. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04287-5>

Schimit, P. H. T., & Monteiro, L. H. A. (2009). On the basic reproduction number and the topological properties of the contact network: An epidemiological study in mainly locally connected cellular automata. *Ecological Modelling*, 220(7), 1034–1042. <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2009.01.014>